

TD n°7: Un peu d'analyse fonctionnelle

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un  sont à faire en priorité, ceux marqués d'un  sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Théorème de Montel

Exercice 1. Une application du théorème de Montel.

Soient $a < b$ deux réels et $U = \{z \in \mathbb{C}, a < \Re(z) < b, \Im(z) > 0\}$. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ bornée. Supposons qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c + iy) \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow \infty$. Montrer que $f(x + iy) \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow \infty$ pour tout $x \in]a, b[$.

Exercice 2. Limite simple de fonctions holomorphes.

1. Soient U un ouvert non vide et $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge simplement vers une fonction f . Montrer qu'il existe un ouvert non vide V dont l'adhérence est contenue dans U et un réel $M > 0$ tels que :

$$\forall z \in V, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(z)| \leq M.$$

2. En déduire qu'une limite simple de fonctions de $\mathcal{O}(U)$ est holomorphe sur un ouvert dense dans U .

Exercice 3. Une suite bien connue.

Pour $n > 0$, on définit $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Démontrer à l'aide du théorème de Montel que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une limite à déterminer.

Exercice 4. Une famille normale.

Soit $p > 0$, on note $\mathcal{F}_p$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ vérifiant $|f|_{L^p} \leq 1$.

1. Soit $r < 1$ et $r < \rho < 1$. Démontrer que pour $z \in \overline{\mathbb{D}}(0, r)$, on a

$$|f(z)|^p \leq \frac{\rho}{2\pi(\rho - r)^p} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que

$$(1 - r - \varepsilon)|f(z)|^p \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{|w| \geq r + \varepsilon} |f(w)|^p d\lambda(w).$$

3. Dédurre à l'aide du théorème de Montel que la famille $\mathcal{F}_p$ est normale.

Exercice 5. Une partie compacte de $\mathcal{O}(U)$.

1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $a \in U$. Notons:

$$\mathcal{F}_a = \{f \in \mathcal{O}(U) : f \text{ injective}, f(a) = 0, \sup_{z \in U} |f(z)| \leq 1\}.$$

Démontrer que si elle est non-vide, $\mathcal{F}_a$ est une partie relativement compacte de $\mathcal{O}(U)$, dont l'adhérence contient 0.

2. Démontrer que $\mathcal{F}_a \cup \{0\}$ est fermée, donc compacte.

Exercice 6. L'algèbre du disque et sa boule unité.

On note $A(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions continues sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}}$ qui sont holomorphes sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$.

1. Démontrer que $A(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre fermée de l'algèbre $C(\overline{\mathbb{D}})$ des fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ avec la norme $\sup |\cdot|_\infty$.

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

- Vérifier que $A(\mathbb{D})$ n'est pas stable par dérivation.
- Démontrer que l'algèbre $\mathbb{C}[z]$ des polynômes est dense dans $A(\mathbb{D})$.
On introduit, pour $|a| < 1$, le facteur de Blaschke

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

- Démontrer que $|z| = 1 \implies |\varphi_a(z)| = 1$ et en déduire que φ_a envoie $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$.
- Soit $f \in A(\mathbb{D})$ unimodulaire, c'est-à-dire que $|z| = 1 \implies |f(z)| = 1$. Démontrer que f est un produit fini de φ_a et d'un nombre complexe de module 1.
Indication : on pourra démontrer qu'une $g \in A(\mathbb{D})$ unimodulaire sans zéros est constante.
- Soit $f \in \mathbb{C}[z]$ de degré d vérifiant $|f|_\infty < 1$, on note $f^*(z) = z^d \overline{f(1/\bar{z})}$. Démontrer que

$$2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} z^d + f(z)}{1 + f^*(z) e^{it}} dt$$

- En déduire que l'enveloppe convexe fermée des unimodulaires est la boule unité fermée.

Exercice 7. Propriété universelle de l'algèbre du disque.

Un $\mathbb{C}$ -espace de Banach $(B, |\cdot|_B)$ est appelé $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach, ou juste algèbre de Banach, si B est muni d'une structure de $\mathbb{C}$ -algèbre associative unitaire (mais pas nécessairement commutative) pour laquelle la norme est sous-multiplicative, c'est-à-dire que $|bb'|_B \leq |b|_B |b'|_B$.

- Démontrer que la multiplication est continue de B^2 dans B .
- Vérifier que $A(\mathbb{D})$ est une algèbre de Banach, ainsi que $C(X, \mathbb{C})$ pour un compact X .
On dit qu'un élément $b \in B$ est polynomialement borné s'il existe $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{C}[z]$, on a

$$|P(b)| \leq C |P|_\infty.$$

On note $PB(B)$ l'ensemble des éléments polynomialement bornés de B .

- Démontrer que l'application $\varphi \mapsto \varphi(z)$ induit une bijection

$$\text{Hom}_{\text{alg}}(A(\mathbb{D}), B) \xrightarrow{\sim} PB(B)$$

où Hom_{alg} désigne les morphismes continus de $\mathbb{C}$ -algèbres. Démontrer également que cette bijection est continue pour la topologie de la convergence simple à gauche et la topologie de sous-espace de B à droite.

- Dans le cas où B est une sous-algèbre fermée d'un $C(X, \mathbb{C})$ pour X compact, expliciter $PB(B)$ et démontrer que l'application ci-dessus est un homéomorphisme.
- En considérant l'algèbre $B = \mathbb{C}[z]/(z^2)$ avec la norme $|a + b[z]| = |a| + |b|$, montrer que l'application réciproque $PB(B) \rightarrow \text{Hom}_{\text{alg}}(A(\mathbb{D}), B)$ n'est pas toujours continue.

Théorèmes de Runge et Mittag-Leffler.

Exercice 8. Manipulation du théorème de Runge.

- Soit $K \subsetneq \partial\mathbb{D}$ un compact, $\varepsilon > 0$. Démontrer à l'aide du théorème de Runge qu'il existe un polynôme $P(z)$ vérifiant $P(0) = 1$ et $\sup_{z \in K} |P(z)| < \varepsilon$.
- Démontrer à l'aide du théorème de Runge qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes vérifiant, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = \begin{cases} 1, & \Re(z) > 0 \\ -1, & \Re(z) < 0. \end{cases}$$

**Exercice 9. Fonctions holomorphes à valeurs de dérivées prescrites.**

Démontrer à l'aide du théorème de Weierstrass et de Mittag-Leffler le fait suivant : étant donné un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$, une suite $(z_n)_n$ sans point d'accumulation dans U , une suite $(k_n)_n$ d'entiers strictement positifs, et une collection $(a_{n,k})_{k < k_n}$ de nombres complexes, il existe une fonction holomorphe sur U dont la k -ème dérivée en z_n avec $k < k_n$ est $a_{n,k}$.

Exercice 10. Quotients de fonctions holomorphes.

Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Démontrer que f est un quotient de fonction holomorphes.

**Exercice 11. $\mathcal{O}(U)$ est un anneau de Bézout.**

On fixe un ouvert connexe $U \subseteq \mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{O}(U)$, $a \in U$, on note $v_a(f)$ l'ordre d'annulation de f en a , $\text{div}(f) = (v_a(f))_{a \in U}$ et pour $I \subseteq \mathcal{O}(U)$, $\text{div}(I) = (\min_{f \in I} v_a(f))_{a \in U}$. Pour $\mathbf{m} = (m_a)_{a \in U}$, $\mathbf{n} = (n_a)_{a \in U}$, on écrira $\mathbf{m} \geq \mathbf{n}$ si $m_a \geq n_a$ pour tout a , et on appelle support de $\mathbf{n}$ et note $\text{Supp}(\mathbf{n})$ l'ensemble $\{a \in U : n_a \neq 0\}$.

1. (a) Démontrer que pour $a \in U$, $\mathfrak{m}_a := \{f \in \mathcal{O}(U) : f(a) = 0\}$ est un idéal.
- (b) Plus généralement, si $\mathbf{n} = (n_a)_{a \in U}$, démontrer que

$$I(\mathbf{n}) := \{f \in \mathcal{O}(U) : \text{div}(f) \geq \mathbf{n}\}$$

est un idéal de $\mathcal{O}(U)$ et vérifier que $\mathfrak{m}_a = I(\mathbf{1}_a)$ où $\mathbf{1}_a$ est la famille d'entiers qui vaut 1 en a et 0 partout ailleurs. Démontrer que si $\text{Supp}(\mathbf{n})$ est discret dans U , alors $\text{div}(I(\mathbf{n})) = \mathbf{n}$. Que se passe-t-il dans le cas contraire ?

- (c) Soit $f \in \mathcal{O}(U)$. Démontrer que $(f) = \{fg : g \in \mathcal{O}(U)\}$ est un idéal, qui vérifie $\text{div}((f)) = \text{div}(f)$. Plus généralement, si $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(U)$, démontrer que

$$(f_1, \dots, f_m) := \{g_1 f_1 + \dots + g_m f_m : g_1, \dots, g_m \in \mathcal{O}(U)\}$$

est un idéal vérifiant $\text{div}((f_1, \dots, f_m)) \geq (\min_j v_a(f_j))_{a \in U}$.

2. Vérifier que $\text{div}(f) \geq \text{div}(g)$ si et seulement si g divise f , c'est-à-dire s'il existe $h \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f = gh$.
3. Soient $f, g \in \mathcal{O}(U)$ sans zéro commun. Démontrer à l'aide du théorème de Mittag-Leffler qu'il existe $v \in \mathcal{O}(U)$ telle que $\text{div}(1 - vg) \geq \text{div}(f)$.
4. En déduire que pour $f, g \in \mathcal{O}(U)$, il existe $u, v \in \mathcal{O}(U)$ et $h \in \mathcal{O}(U)$ vérifiant $v_a(h) = \min(v_a(f), v_a(g))$ pour tout a , telles que $uf + vg = h$.
5. Soit $I \subseteq \mathcal{O}(U)$ un idéal finiment généré, c'est-à-dire de la forme $(f_1, \dots, f_m)$. Démontrer que I est de la forme (f) .
6. Exhiber un idéal qui n'est pas de la forme $(f_1, \dots, f_m)$.